COMVEST

COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

UNICAMP vestibular 2017

2ª FASE

MATEMÁTICA

2ª Fase • Matemática

Introdução

A prova de Matemática procura selecionar candidatos com um conhecimento crítico e integrado do conteúdo apresentado no Ensino Fundamental e Médio. A leitura atenta dos enunciados das questões, a formulação correta dos problemas e a apresentação de respostas claras são indispensáveis para o sucesso do candidato. As questões de Matemática aplicadas na segunda fase do Vestibular 2017 foram originais, com enunciados claros e objetivos, tendo cada questão focalizado mais de um tópico do programa, no intuito de integrar conhecimentos.

A média geral de desempenho dos candidatos na prova de Matemática foi igual a 10,2 pontos, de um total de 24 pontos, com um desvio padrão de 6,3 pontos. Esses resultados caracterizam um grau médio de dificuldade da prova, o que é desejável para uma seleção adequada.

A seguir, para cada questão aplicada, apresentamos o enunciado, os objetivos, uma resolução detalhada e uma análise do desempenho dos candidatos. Além disso, fazemos alguns comentários gerais, visando a um melhor aproveitamento deste material.

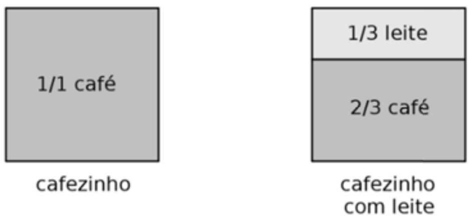
Questão 13

Diversas padarias e lanchonetes vendem o “cafezinho” e o “cafezinho com leite”. Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, **A** e **B**, que vendem esses produtos com um volume de $60\,ml$, conforme mostra a tabela abaixo.

Produto	**A**	**B**
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento **A** para o estabelecimento **B**, para os dois produtos.

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos conforme indica a figura abaixo. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento **B,** calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.



Objetivo da Questão

Avaliar o conhecimento sobre porcentagem e variação percentual.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Para o cafezinho, o aumento percentual é de $\frac{R\$\,3{,}00 - R\$\,2{,}00}{R\$\,2{,}00} \times 100\% = 0{,}5 \times 100\% = 50\%$ e, para o cafezinho com leite, o aumento percentual é de $\frac{R\$\,4{,}00 - R\$\,2{,}50}{R\$\,2{,}50} \times 100\% = 0{,}6 \times 100\% = 60\%$.

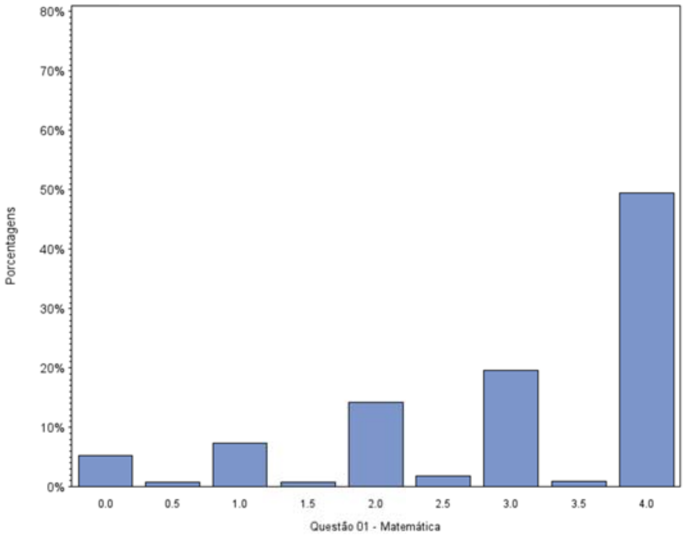
b) **(2 pontos)**

No cafezinho com leite são servidos $1/3 \times 60ml = 20\,ml$ de leite e $2/3 \times 60ml = 40\,ml$ de café. Como no estabelecimento **B** um cafezinho de $60\,ml$ custa $R\$\,3{,}00$, os $40\,ml$ de café servidos no cafezinho com leite custam $R\$\,3{,}00 \times 40\,ml/60\,ml = R\$\,2{,}00$. Portanto, os $20\,ml$ de leite servidos custam $R\$\,4{,}00 - R\$\,2{,}00 = R\$\,2{,}00$. Logo, o preço que está sendo cobrado por um litro de leite ($1\,l = 1000\,ml = 50 \times 20\,ml$) é $50 \times R\$\,2{,}00 = R\$\,100{,}00$.

2ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 3,0, com um desvio padrão de 1,2. Foi a maior média da prova de Matemática, o que é comum acontecer com a primeira questão, que, por tradição, é a de mais fácil resolução.



Comentários Gerais

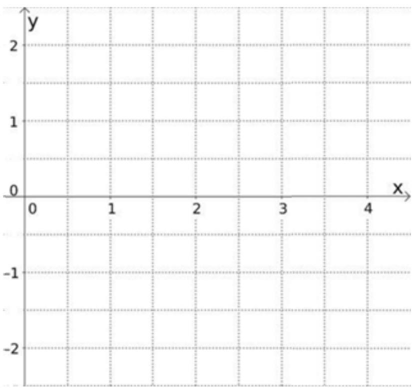
Embora de fácil solução, a questão requer atenção para se calcular a variação percentual entre os preços praticados nos estabelecimentos **A** e **B** e não entre os preços do cafezinho e do cafezinho com leite em cada estabelecimento. Além disso, no item **b** era importante que o candidato percebesse que a proporção apresentada através de figuras fazia referência aos volumes e não aos preços.

Questão 14

Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x. No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.

a) Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \le x \le 4$.

b) Considere os pontos de coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M = (1, c)$, determine a e b.



Objetivo da Questão

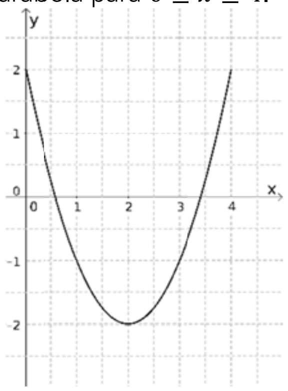
Avaliar a capacidade de extrair informações básicas da expressão de uma função quadrática, associadas ao gráfico da parábola que a representa, e explorar o conhecimento sobre traçado de parábolas. Avaliar a aptidão para manipular coordenadas cartesianas de pontos sobre gráficos.

2ª Fase • Matemática

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Podemos escrever $f(x) = x^2 - 4x + c = (x-2)^2 + c - 4$. Logo, a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$ tem vértice no ponto $V = (2, c-4)$. Do enunciado temos que $2 + c - 4 = 0$, ou seja, $c = 2$. Assim, a equação da parábola é $y = f(x) = x^2 - 4x + 2$, o vértice é $V = (2, -2)$, para $x = 0$ temos $y = f(0) = 2$ e para $x = 4$ temos $y = f(4) = 2$. Abaixo temos um esboço da parábola para $0 \leq x \leq 4$.

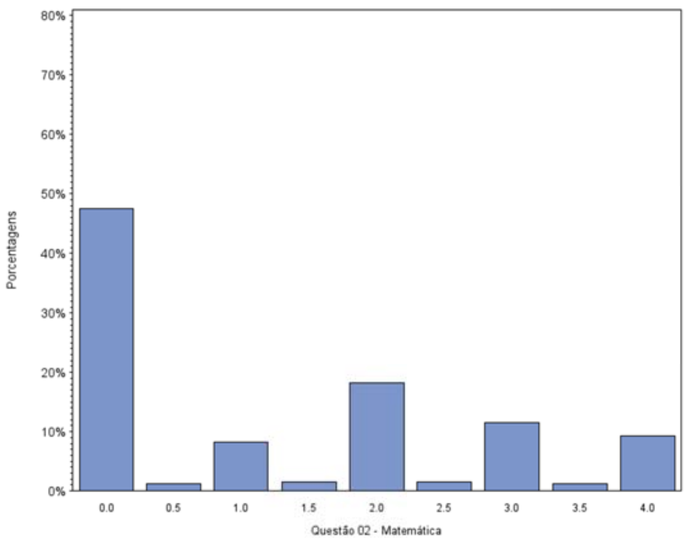


b) **(2 pontos)**

Temos que $A = \big(a, f(a)\big) = (a, a^2 - 4a + c)$ e $B = (b, b^2 - 4b + c)$. O ponto médio é, então, $M = (1, c) = \big((a+b)/2, (a^2 - 4a + c + b^2 - 4b + c)/2\big)$. Logo, $a + b = 2$ e $a^2 + b^2 = 4a + 4b$. Tomando, da primeira equação, $b = 2 - a$ e substituindo na segunda equação, temos que $a^2 + (2-a)^2 = 4a + 4(2-a)$. Simplificando, obtemos $2a^2 - 4a - 4 = 0$, ou ainda $a^2 - 2a - 2 = 0$. Calculando o discriminante, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12$, temos as soluções $a = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Portanto, $b = 2 - a = 2 - \big(1 \pm \sqrt{3}\big) = 1 \mp \sqrt{3}$. Como $a < b$, temos que $a = 1 - \sqrt{3}$ e $b = 1 + \sqrt{3}$.

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,3, com um desvio padrão de 1,4. Como será observado abaixo, as Questões 14, 16 e 17 apresentaram média e desvio padrão muito próximos.



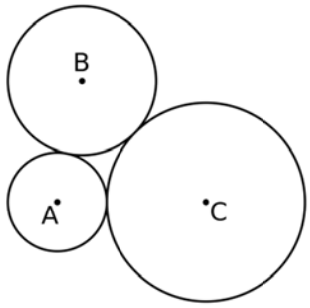
Comentários Gerais

Um dos fatores que contribuíram para a baixa média desta questão foi o esboço incorreto do gráfico, em que até segmentos de reta foram exibidos para representar uma função quadrática. Observar que não era necessário o cálculo das raízes da equação quadrática correspondente para esboçar o gráfico. Um outro fator foi a falta de habilidade com as manipulações algébricas necessárias para a resolução do item **b**.

2ª Fase • Matemática

Questão 15

A figura abaixo exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos a, b e c, respectivamente.



a) Determine os valores de a, b e c, sabendo que a distância entre A e B é de $5\,cm$, a distância entre A e C é de $6\,cm$ e a distância entre B e C é de $9\,cm$.

b) Para $a = 2\,cm$ e $b = 3\,cm$, determine o valor de $c > b$ de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

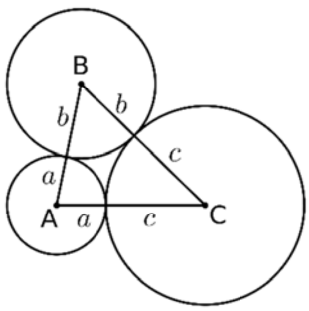
Objetivo da Questão

Avaliar a capacidade de relacionar corretamente os comprimentos de raios de círculos tangentes e resolver um sistema linear, bem como de aplicar o Teorema de Pitágoras.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Indicando os comprimentos dos raios nos círculos, como exibe a figura abaixo, podemos construir as relações: $a + b = AB = 5\,cm$, $a + c = AC = 6\,cm$ e $b + c = BC = 9\,cm$. Tomando $b = 5 - a$ da primeira equação e $c = 6 - a$ da segunda equação e substituindo na terceira equação, obtemos $(5 - a) + (6 - a) = 9$, ou seja, $11 - 2a = 9$ e, portanto, $a = 1\,cm$. Daí obtemos $b = 5 - 1 = 4\,cm$ e $c = 6 - 1 = 5\,cm$.



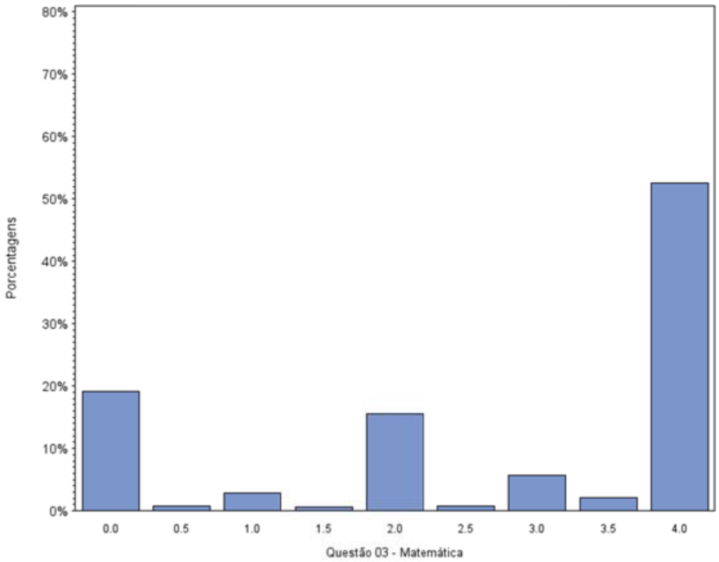
b) **(2 pontos)**

Uma vez que $c > b$ e $b > a$, o comprimento do maior lado do triângulo é $b + c$. Assim, como o triângulo deve ser retângulo, o comprimento da hipotenusa é $b + c$ e o comprimento dos catetos, $a + b$ e $a + c$. Pelo Teorema de Pitágoras, $(b + c)^2 = (a + b)^2 + (a + c)^2$, ou seja, $(3 + c)^2 = (2 + 3)^2 + (2 + c)^2$. Logo, $9 + 6c + c^2 = 25 + 4 + 4c + c^2$ e, portanto, $2c = 20$, o que implica que $c = 10\,cm$.

2ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 2,7, com um desvio padrão de 1,6. Essa média ficou muito próxima da média da primeira questão, e muito afastada da média das outras questões. Esse fato não é usual na prova de Matemática.



Comentários Gerais

Os candidatos obtiveram notas acima da média nesta questão, o que talvez indique que os conceitos básicos de Geometria Plana estão sendo bem absorvidos pelos alunos do Ensino Básico. Podemos observar, no entanto, que no item **a**, onde um sistema linear bem simples deveria ser corretamente resolvido, muitos candidatos atribuíram um valor aleatório a uma das variáveis. No item **b** era essencial identificar o maior lado do triângulo apresentado, de modo a aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras.

Questão 16

Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Mostre que, se r é uma raiz de $p(x)$, então $1/r$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$.

b) Determine os valores de a e b para os quais a sequência $(p(-1), p(0), p(1))$ é uma progressão aritmética (PA), cuja razão é igual a $p(2)$.

Objetivo da Questão

Avaliar o conhecimento do conceito básico de raiz de polinômio e a capacidade de encadear de forma correta a prova de um resultado simples. Avaliar a habilidade para calcular a razão de uma PA cujos termos são valores numéricos do polinômio.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

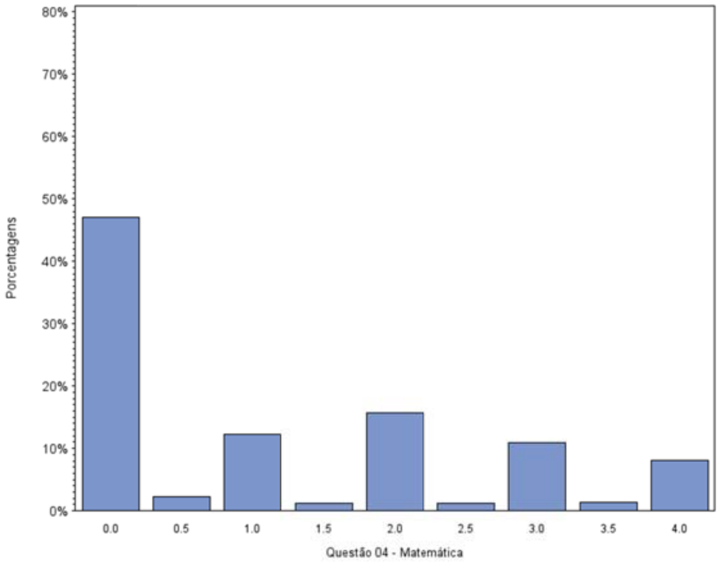
Observe que $r \neq 0$, pois $p(0) = 1 \neq 0$. Assim, temos que $q\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^3 + b\left(\frac{1}{r}\right)^2 + a\left(\frac{1}{r}\right) + 1 = \frac{1}{r^3} + \frac{b}{r^2} + \frac{a}{r} + 1 = \frac{1+br+ar^2+r^3}{r^3} = \frac{p(r)}{r}$. Como r é uma raiz de $p(x)$, temos que $p(r) = 0$ e, portanto, $q\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{0}{r^3} = 0$, ou seja, $1/r$ é uma raiz de $p(x)$.

b) **(2 pontos)**

Temos que $p(-1) = -1 + a - b + 1 = a - b$, $p(0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$, $p(1) = 1 + a + b + 1 = a + b + 2$ e $p(2) = 8 + 4a + 2b + 1 = 9 + 4a + 2b$. Como $(p(-1), p(0), p(1))$ é uma PA com razão $p(2)$, temos que $p(2) = p(0) - p(-1) = p(1) - p(0)$, ou seja, $9 + 4a + 2b = 1 - (a - b) = a + b + 2 - 1$. Da segunda igualdade, obtemos diretamente que $a = 0$. Substituindo esse resultado na primeira igualdade, temos que $9 + 2b = 1 + b$ e, portanto, $b = -8$.

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,2, com um desvio padrão de 1,4.



Comentários Gerais

O desempenho dos candidatos, nesta questão, ficou abaixo das expectativas. Embora o item **a** envolva apenas a avaliação do polinômio em um ponto, sua resolução exige um encadeamento lógico mais formal, o que, em geral, é de grande dificuldade para os estudantes. No item **b**, após a obtenção dos valores do polinômio em pontos preestabelecidos, a aplicação da condição de PA dava origem a um sistema simples de duas equações, cuja resolução fornecia a solução requerida. Entretanto, muitos candidatos utilizaram o valor 2 como razão ao invés do valor correto $p(2)$, fato que contribuiu para uma média tão baixa na questão.

Questão 17

Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} mx + 2z = 4, \\ x - y + z = 3, \\ 2x + mz = 4. \end{cases}$$

a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.

b) Para $m = 2$, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

2ª Fase • Matemática

Objetivo da Questão

O candidato deveria efetuar operações com os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema linear e calcular o quadrado dessa matriz. Deveria ainda encontrar as soluções de um sistema linear indeterminado, analisando o mínimo de uma função quadrática.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A matriz dos coeficientes do sistema linear é dada por $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$. A soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual a $S_1 = m^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + m^2 = 2m^2 + 11$. Calculando A^2,

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+0+4 & 0+0+0 & 2m+0+2m \\ m-1+2 & 0+1+0 & 2-1+m \\ 2m+0+2m & 0+0+0 & 4+0+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+4 & 0 & 4m \\ m+1 & 1 & m+1 \\ 4m & 0 & m^2+4 \end{pmatrix}.$$

A soma dos elementos de A^2 é, então, $S_2 = m^2 + 4 + 0 + 4m + m + 1 + 1 + m + 1 + 4m + 0 + m^2 + 4 = 2m^2 + 10m + 11$. Para que $S_1 = S_2$, devemos ter $2m^2 + 11 = 2m^2 + 10m + 11$, ou seja, $m = 0$.

b) **(2 pontos)**

Para $m = 2$, temos o sistema linear

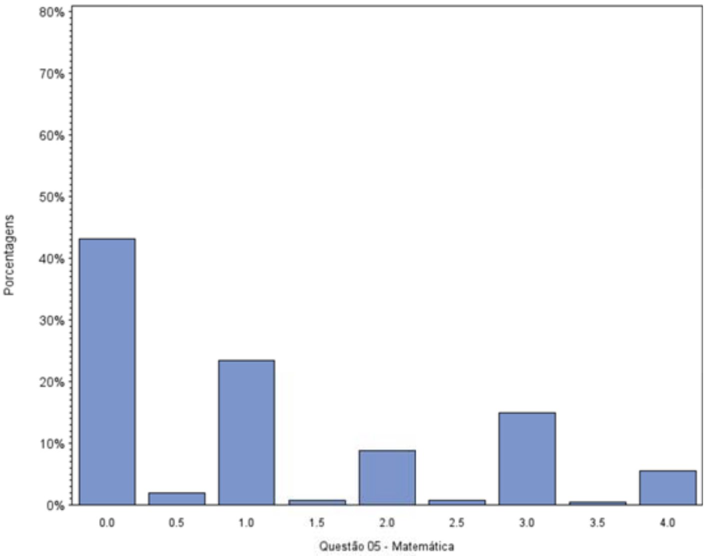
$$\begin{cases} 2x + 2z = 4, \\ x - y + z = 3, \\ 2x + 2z = 4. \end{cases}$$

Note que a primeira e a terceira equações são iguais. Da primeira equação, podemos escrever $z = 2 - x$. Substituindo na segunda equação, $x - y + (2 - x) = 3$, concluímos que $y = -1$. Assim, esse sistema tem infinitas soluções: para qualquer número real a, $x = a$, $y = -1$ e $z = 2 - a$ é uma solução. Temos então que o produto das variáveis em qualquer solução é dado por $xyz = a \times (-1) \times (2 - a) = a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$. Esse produto é uma função quadrática na variável a, cujo coeficiente quadrático é positivo. O gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, cujo vértice fornece o valor mínimo do produto. O vértice dessa parábola tem abscissa em $a = 1$. Portanto, a solução procurada é $x = a = 1$, $y = -1$ e $z = 2 - a = 1$.

2ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,1, com um desvio padrão de 1,3.



Comentários Gerais

Apesar de o tema Sistemas Lineares ser intensamente abordado na Educação Básica, a combinação desse tópico com potência de matrizes e obtenção do valor mínimo de uma função quadrática tornaram a questão de difícil resolução. Além disso, no item **b**, o sistema linear resultante é indeterminado, fato não muito comum para os estudantes, que atribuíram valores numéricos inteiros às variáveis, tentando encontrar a solução.

Questão 18

Sabendo que k é um número real, considere a função $f(x) = k\,\text{sen}\,x + \cos x$, definida para todo número real x.

a) Seja t um número real tal que $f(t) = 0$. Mostre que $f(2t) = -1$.

b) Para $k = 3$, encontre todas as soluções da equação $f(x)^2 + f(-x)^2 = 10$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Objetivo da Questão

Avaliar a capacidade de manipular funções e equações trigonométricas.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Temos que $f(2t) = k\,\text{sen}(2t) + \cos(2t) = k(2\,\text{sen}\,t\cos t) + (\cos t)^2 - (\text{sen}\,t)^2$. Substituindo $(\text{sen}\,t)^2$ por $1 - (\cos t)^2$, obtemos $f(2t) = 2k\,\text{sen}\,t\cos t + 2(\cos t)^2 - 1$. Colocando $2\cos t$ em evidência, chegamos a $f(2t) = 2\,(k\ \text{sen}\,t + \cos t)\cos t - 1 = 2\,f(t)\cos t - 1$. Como $f(t) = 0$, obtemos $f(2t) = 0 - 1 = -1$.

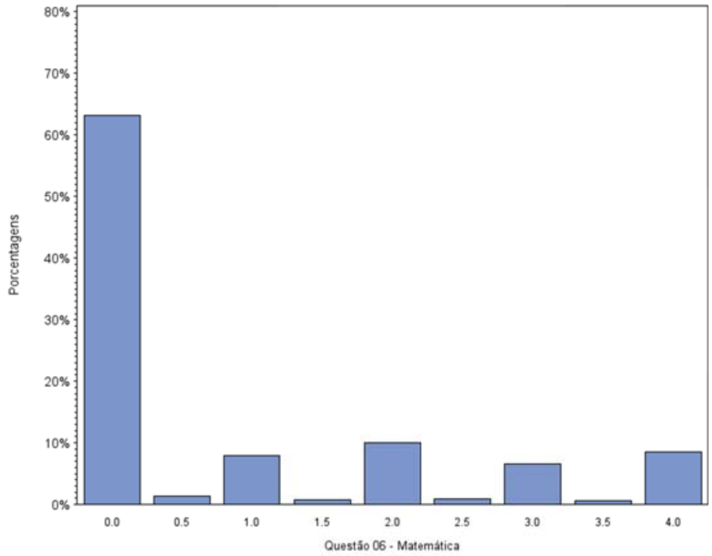
b) **(2 pontos)**

Para $k = 3$, temos que $f(x)^2 = (3\,\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 9\,(\text{sen}\,x)^2 + 6\,\text{sen}\,x\cos x + (\cos x)^2$ e $f(-x)^2 = (3\,\text{sen}(-x) + \cos(-x))^2 = (-3\,\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 9\,(\text{sen}\,x)^2 - 6\,\text{sen}\,x\cos x + (\cos x)^2$. Logo, $f(x)^2 + f(-x)^2 = 18\,(\text{sen}\,x)^2 + 2(\cos x)^2 = 16\,(\text{sen}\,x)^2 + 2 = 10$, ou seja, $(\text{sen}\,x)^2 = \frac{1}{2}$. Temos então que $\text{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e, como $0 \leq x \leq 2\pi$, temos as soluções $x = \pi/4$ ou $x = 3\pi/4$ ou $x = 5\pi/4$ ou $x = 7\pi/4$.

2ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 0,9, com um desvio padrão de 1,3. Foi a menor média da Prova de Matemática, o que pode ser justificado pela dificuldade do tema Trigonometria.



Comentários Gerais

O item **a** depende da aplicação de identidades trigonométricas, como a do arco duplo, e da manipulação de expressões envolvendo senos e cossenos, assuntos considerados difíceis pelos candidatos. Além disso, era necessária certa habilidade para a dedução exigida. No item **b**, era fundamental o conhecimento de que a função seno é ímpar e a função cosseno é par para a análise das soluções de uma equação trigonométrica simples, de acordo com a restrição imposta no enunciado. Porém, vários candidatos fazem confusão entre essas propriedades, o que inviabiliza uma resolução correta. Soma-se a tudo isso o fato de ser a última questão da Prova de Matemática e do Exame.