UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2005

vestibular nacional UNICAMP

2ª Fase

Matemática

Matemática

INTRODUÇÃO

As questões da segunda fase da prova de Matemática do Vestibular Unicamp são selecionadas para avaliar o candidato, especialmente, nos seguintes aspectos: capacidade de leitura de textos específicos da área, raciocínio abstrato, habilidade na resolução de problemas e domínio dos conteúdos usualmente presentes no Ensino Fundamental e Ensino Médio de Matemática. As questões são apresentadas em ordem crescente de dificuldades previsíveis e divididas em duas partes para permitir uma melhor distribuição dos conteúdos programáticos. As últimas questões, por serem bem mais difíceis, pretendem contribuir para uma melhor seleção dos candidatos destinados às áreas que exigem conhecimentos mais profundos de conteúdos e técnicas próprias da matemática mais elaborada.

1. São conhecidos os valores calóricos dos seguintes alimentos: uma fatia de pão integral, 55 kcal; um litro de leite, 550 kcal; 200 g de manteiga, 1.400 kcal; 1 kg de queijo, 3.200 kcal; uma banana, 80 kcal.

a) Qual o valor calórico de uma refeição composta por duas fatias de pão integral, um copo de 200 ml de leite, 10 g de manteiga, 4 fatias de queijo, de 10 g cada uma, e duas bananas?

b) Um copo de leite integral contém 248 mg de cálcio, o que representa 31% do valor diário de cálcio recomendado. Qual é esse valor recomendado?

RESPOSTA ESPERADA

a) [2 fatias de pão]+[1copo de leite]+[10 g de manteiga]+[40 g de queijo]+[2 bananas] = [110 kcal]+[110 kcal]+[70 kcal]+[128 kcal]+[160 kcal].

Efetuando a soma obtemos 578 kcal.

Resposta: O valor calórico dessa refeição é de 578 kcal (2 pontos).

b) Se 248 mg de cálcio correspondem a 31% do valor diário de cálcio recomendado, então x mg de cálcio correspondem a 100%, ou seja: $x = \dfrac{248 \cdot 100}{31}$. Logo x = 800.

Resposta: O valor diário recomendado de cálcio é de 800 mg (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

A) Pão integral	1 fatia = 55 Kcal	2 fatias = 110 Kcal
leite	1 litro = 550 Kcal	200 ml = 110 Kcal
manteiga	200 g = 1400 Kcal	10 g = 70 Kcal
queijo	1 Kg = 3 200 Kcal	40 g = 128 Kcal
banana	1 = 80 Kcal	2 = 160 Kcal

1 – 55 | 1 l – 1000 ml – 550 | 200 – 1400 | 1000 g – 3 200
2 – 110 Kcal | 200 ml – 110 Kcal | 10 – 70 Kcal | 40 g – 128 Kcal

→ 110 + 160 + 110 + 70 + 128 = 578 Kcal

a refeição terá valor calórico igual a 578 Kcal

B) 248 mg de cálcio — 31%
x — (100%) → valor recomendado

31x = 24800 → x = 800 mg

O valor recomendado é 800 mg por dia.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) 1 fatia de pão — 55 Kcal
2 fatias — x
x = 110 Kcal
1L de leite — 550 Kcal
0,2L — y
y = 110 Kcal
$x + y + z + w + 2$ bananas
$= \underline{1730 \text{ Kcal}}$

200g manteiga — 1400 Kc
10g — z
z = 70 Kcal
1Kg queijo — 3200 Kcal
0,4 Kg — w
w = 1280 Kcal
2 bananas — 160 Kcal

b)
31% — 248 mg
100% — x
x = 80 ∴ 80 mg + 240 mg = $\boxed{320 \text{ mg}}$

COMENTÁRIOS

O propósito da questão foi verificar em que medida o candidato conseguiria aplicar a matemática aprendida na escola ao problema cotidiano relativo à prática de controle alimentar com base em informações quantitativas impressas nos produtos consumidos por grande parte da população. Questão simples, que exigia do candidato apenas conhecimentos relativos à realização de operações aritméticas elementares, aos conceitos de proporcionalidade e porcentagem e a transformações de unidades de massa e capacidade.

2. A quantia de R$1.280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

a) A divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?

b) A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

RESPOSTA ESPERADA

a) Basta dividir a importância de R$ 1.280,00 em 8+5+7 = 20 partes e multiplicar o resultado por 8, 5 e 7. Temos então: R$ 64,00 x 8 = R$ 512,00, R$ 64,00 x 5 = R$ 320,00 e, finalmente, R$ 64,00 x 7 = R$ 448,00.

Resposta: O primeiro receberá R$ 512,00, o segundo R$ 320,00 e o terceiro R$ 448,00 (2 pontos).

b) Para dividir uma importância em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10, devemos dividir essa importância em partes diretamente proporcionais a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$. Devemos, então, dividir R$ 1.280, 00 por $\frac{8}{10} = \frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ e multiplicar o resultado por $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$. Assim: 1.280 : $\frac{8}{10} = \frac{1.280 \times 10}{8} = 1.600$, de modo que: $\frac{1}{5}\times 1600 = 320$, $\frac{1}{2}\times 1600 = 800$ e $\frac{1}{10}\times 1600 = 160.$

Resposta: O primeiro receberia R$ 320,00, o segundo R$ 800,00 e o terceiro R$ 160,00 (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

R$ 1280,00 para 3 pessoas

a) $8x + 5x + 7x = 1280$

$x = 64$ reais

$8x = 512$ | $5x = 320$ | $7x = 448$ |

As pessoas receberão uma R$ 512,00, outra R$ 320,00 e a terceira R$ 448,00

b) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{x}{10} = 1280$

$\frac{2x + 5x + x}{10} = \frac{12800}{10}$

$x = 1600$ reais

$\frac{x}{5} = 320$ | $\frac{x}{2} = 800$ | $\frac{x}{10} = 160$ |

Uma pessoa receberá R$ 320,00
Outra receberá R$ 800,00 e,
a terceira, R$ 160,00.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) $8 + 5 + 7 = 20$

1° = 6,400 x 8 = 51,200

2° = 6,400 x 5 = 32.000

3° = 6.400 x 7 = 44.800

1° → $\frac{8}{20}$

2° → $\frac{5}{20}$

3° → $\frac{7}{20}$

1280.00 | 20
80 | 64.00
000

Resposta: Recebo respectivamente R$ 51,200, R$ 32,000 e R$ 44.800.

b)

$\frac{1}{5}$. 128.000 → 25 600

$\frac{1}{2}$. 128.000 → 64 000

$\frac{1}{10}$. 128.000 → 12.800

COMENTÁRIOS

Questão muito simples, envolvendo os conceitos de proporção direta e inversa, vistos no ensino fundamental. Boa parte dos candidatos mostrou dificuldade para resolver o item b, referente a quantias inversamente proporcionais. Outros não levaram em conta os dados do enunciado, fornecendo valores que não somavam R$ 1.280,00, como esperado.

3. O custo de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial Q_0, fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância D percorrida nesta corrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual se percorreu 3,6km, a quantia cobrada foi de R$8,25, e que em outra corrida, de 2,8km, a quantia cobrada foi de R$7,25.

a) Calcule o valor inicial Q_0.

b) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R$75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

RESPOSTA ESPERADA

Seja Q o valor de uma corrida, então Q = Q_0 + k.D onde k é o custo de 1km percorrido (1 ponto).

a) Para a primeira corrida temos 8,25 = Q_0 + k.3,6, e para a segunda corrida, 7,25= Q_0 + k.2,8. Subtraímos as duas igualdades e obtemos 1 = k.0,8 donde k = 1,25. Da primeira igualdade, então teremos Q_0 = 8,25 – 1,25.3,6 = 3,75.

Resposta: O valor inicial Q_0 é igual a R$ 3,75 (2 pontos).

b) O taxista, em 10 corridas, arrecadou R$ 75,00. Este valor inclui 10 vezes o valor inicial, isto é, R$ 37,50. Como 75,00 = 37,50 + 1,25.D, teremos D = 37,50/1,25 = 30.

Resposta: O taxista percorreu, naquele dia, 30km (2 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) x = valor fixo

$$\begin{cases} Q_0 + 3{,}6.x = 8{,}25 \\ Q_0 + 2{,}8x = 7{,}25 \quad (-1) \end{cases}$$

$0{,}8x = 1$

$x = 1{,}25$

$Q_0 + 3{,}6.1{,}25 = 8{,}25$

$Q_0 = 8{,}25 - 4{,}5$

$Q_0 = 3{,}75$

Resp: O valor inicial é R$3,75

b) $10Q_0 + 1{,}25.D = 75$

$10.3{,}75 + 1{,}25.D = 75$

$1{,}25D = 75 - 37{,}5$

$1{,}25D = 37{,}5$

$D = 30$ Km

Resp: Seu carro percorreu 30 Km.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

$\boxed{P = Q_0 + (K \cdot D)}$ P: preço em reais; Q_0: valor inicial; K: preço por quilômetro; D: nº quilômetros rodados

a)

$P_1 = Q_0 + (K \cdot D_1)$

$8{,}25 = Q_0 + (K \cdot 3{,}6)$

$8{,}25 = Q_0 \cdot K + 3{,}6\,Q_0$

$Q_0 \cdot K = 8{,}25 - 3{,}6\,Q_0$

$P_2 = Q_0 + (K \cdot D_2)$

$7{,}25 = Q_0 + (K \cdot 2{,}8)$

$7{,}25 = Q_0 \cdot K + 2{,}8\,Q_0$

$7{,}25 = 8{,}25 - 3{,}6\,Q_0 + 2{,}8\,Q_0$

$Q_0 = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$

Resp: o valor inicial é Q_0 = R$ 1,25.

b) $Q_0 \cdot K = 8{,}25 - 3{,}6\,Q_0$

$K = \frac{8{,}25}{Q_0} - 3{,}6$

$K = \frac{8{,}25}{1{,}25} - 3{,}6$

$K = 6{,}6 - 3{,}6 = 3$

$P = 10 \cdot Q_0 + (K \cdot D)$

$75 = 10 \cdot 1{,}25 + (3 \cdot D)$

$75 = 12{,}5 + 3D$

$3D = 62{,}5$

$D \cong 20{,}83$

Resp.: seu carro percorreu aproximadamente 20,83 quilômetros.

COMENTÁRIOS

A resolução da questão exige conhecimentos muito simples sobre as operações básicas e resolução de equações e sistemas lineares. Porém, vários candidatos cometeram erros nos cálculos. Outros obtiveram “respostas” absolutamente absurdas (por exemplo, valores negativos de Q_0, ou 30.000km percorridos, no item b). Ressaltamos que os candidatos que cometeram erros no item a da questão e tentaram resolver o item b com valores errados de k e Q_0, obtiveram 1 ponto. A questão admite outras soluções, além da exposta acima, baseadas na proporcionalidade entre a distância percorrida e o valor recebido. A banca as aceitou, desde que corretas, e aplicou praticamente a mesma grade.

4. Sejam A, B, C e D os vértices de um quadrado cujos lados medem 10cm cada. Suponha que a circunferência C passe pelos pontos C e D, que formam o lado CD do quadrado, e que seja tangente, no ponto M, ao lado oposto AB.

a) Calcule a área do triângulo cujos vértices são C, D e M.

b) Calcule o raio da circunferência C.

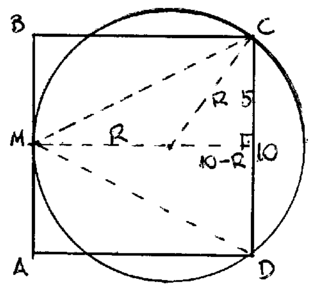
RESPOSTA ESPERADA

O triângulo CDM tem sua base medindo 10 cm e sua altura também 10 cm. Portanto, sua área é de $\frac{10.10}{2} = 50$.

Resposta: A área do triângulo é de 50 cm2 (3 pontos).

a) $(10-R)^2 + 5^2 = R^2$, de onde se conclui que R = 6,25 cm.
Resposta: O raio da circunferência é de 6,25 cm (2 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA



a) $A = \frac{BH}{2} = \frac{10.10}{2} = 50cm$

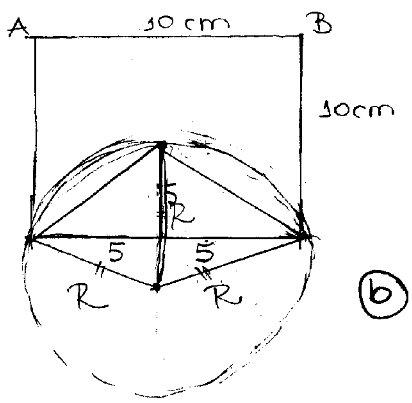
b) $(10-R)^2 + 5^2 = R^2$

$100 - 20R + \cancel{R^2} + 25 = \cancel{R^2}$

$20R = 125$

$R = 6,25cm$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA



ⓐ $= \frac{b.h}{2}$

$\frac{\cancel{10}^{5}.5}{\cancel{2}}$

ⓐ $25cm^2$.

ⓑ $R = 5cm$.

COMENTÁRIOS

Questão considerada de média dificuldade. Permitiu explorar diferentes estratégias de resolução, apesar de ser puramente teórica, e exigiu interpretação de texto com representação gráfica, especialmente para resolução do item b.

Os tópicos utilizados na solução da questão foram: área de figuras planas, inclusive a do triângulo inscrito; resolução de sistemas de equações; Teorema de Pitágoras; relações trigonométricas; retas e circunferências da geometria analítica.

5. Dois navios partem ao mesmo tempo, de um mesmo porto, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Trinta minutos após a partida, a distância entre os dois navios era de 15km e, após mais 15 minutos, um dos navios estava 4,5km mais longe do porto que o outro.

a) Quais as velocidades dos dois navios, em km/h?

b) Quais as distâncias de cada um dos navios até o porto de saída, 270 minutos após a partida?

RESPOSTA ESPERADA

a) A distância percorrida é o produto da velocidade pelo tempo gasto para percorrê-la.

Para um dos navios, temos: $d_1 = v_1 t = \frac{1}{2} v_1$, pois o tempo de percurso foi de 1/2 hora.

Para o outro navio, temos: $d_2 = v_2 t = \frac{1}{2} v_2$.

Como as rotas são perpendiculares, o segmento cujo comprimento é de 15 km é a hipotenusa de um triângulo retângulo e, portanto, temos:

$15^2 = d_1^2 + d_2^2 = (\frac{1}{2} v_1)^2 + (\frac{1}{2} v_2)^2$, de modo que $225 = \frac{1}{4} v_1^2 + \frac{1}{4} v_2^2$ [*].

Por outro lado, após $\frac{3}{4} h$, $d_1 = d_2 + 4{,}5$, ou seja: $\frac{3}{4} v_1 = \frac{3}{4} v_2 + 4{,}5$.

Multiplicando esta última igualdade por 4, tem-se:

$3v_1 = 3v_2 + 18$, ou ainda: $v_1 = v_2 + 6$.

Substituindo em [*] obtém-se, após alguns cálculos, a equação: $v_2^2 + 6v_2 - 432 = 0$.

Esta equação fornece como único valor positivo $v_2 = 18$.

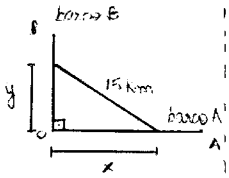
Para esse valor de v_2, obtém-se $v_1 = 24$.

Resposta: As velocidades dos navios eram de 24 e 18 km/h (3 pontos).

b) Como 270 minutos são 4,5 horas, temos: $d_1 = 4{,}5x24 = 108$ e $d_2 = 4{,}5x18 = 81$.

Resposta: Após 270 minutos, as distâncias dos navios ao porto eram de 108 e 81 km (2 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA



a) $x = V_A \cdot 0,5$

$y = V_B \cdot 0,5$

$x^2 + y^2 = 15$

$\left(\frac{V_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{V_B}{2}\right)^2 = (15)^2$

$V_A^2 + V_B^2 = 900$ ①

$\overline{OA} = V_A \cdot 0,75$

$\overline{OB} = V_B \cdot 0,75$

$OA = OB - 4,5$

$0,75V_A = 0,75V_B + 4,5$

$V_A - V_B = 6$

$V_A = V_B + 6$ ②

Substituindo ② em ①

$V_B^2 + 12V_B + 36 + V_B^2 = 900$

$2V_B^2 + 12V_B - 864 = 0$

$V_B^2 + 6V_B - 432 = 0$

$(V_B + 24)(V_B - 18) = 0$

$V_B > 0$

$V_B = 18 \quad V_A = 24$

R → A velocidade dos navios são 18 Km/h e 24 Km/h

b) 270 min = 4,5 h

$V_A = \frac{\Delta S_A}{\Delta t} \qquad 24 = \frac{\Delta S_A}{4,5}$

$\Delta S_A = 108$ Km

$V_B = \frac{\Delta S_B}{\Delta t} \qquad 18 = \frac{\Delta S_B}{4,5}$

$\Delta S_B = 81$ Km.

R → O navio com velocidade igual a 18 Km/h estará a 81 Km do porto e o navio cuja velocidade é de 24 Km/h estará a 108 Km do porto

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) Se após mais 15 minutos (0,25 horas) um navio estava 4,5 Km mais distante do porto em relação ao outro, podemos achar sua velocidade: $Vm = \frac{4,5}{0,25} = 18$ Km/h, e portanto em meia hora ele percorreu 9 Km, podendo assim acharmos o quanto percorreu o outro navio em meia hora, pois estão perpendiculares. $15^2 = 9^2 + d^2 \Rightarrow d = 12$ Km.

A velocidade do outro navio é: $Vm = \frac{12}{0,5} \quad Vm = 24$ Km/h

$\boxed{\text{As velocidades dos navios são: 18 Km/h e 24 Km/h}}$

b) 1 hora – 60 min
x – 270 min
x = 4,5 h.

$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad 18 = \frac{\Delta S}{4,5} \qquad \Delta S = 81$ Km

$24 = \frac{\Delta S'}{4,5} \qquad \Delta S' = 108$ Km.

O navio que tem velocidade 18 Km/h está a 81 Km, e o que tem velocidade 24 Km/h está a 108 Km.

COMENTÁRIOS

O propósito da questão foi verificar em que medida o candidato conseguiria aplicar conhecimentos escolares relativos à álgebra e à geometria plana na interpretação e resolução de um problema que correlaciona as velocidades de dois móveis, e cuja solução requer a construção e resolução de uma equação de segundo grau. Embora a questão possa ser considerada simples, o equacionamento da situação-problema exigia uma clara compreensão dos procedimentos que poderiam ou não ser utilizados para a sua resolução. Alguns candidatos chegaram aos resultados numericamente corretos fazendo inferências incorretas com base em elementos não fornecidos pelo enunciado do problema. Exemplos de inferências incorretas: concluir que o triângulo retângulo a que pode conduzir o equacionamento da situação-problema seja o triângulo pitagórico de lados 9, 12 e 15, e concluir que o deslocamento do navio B seja de 4,5 km em 15 minutos.

6. Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura ao lado.

a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N.

b) Calcule o comprimento do segmento NB.

RESPOSTA ESPERADA

a) Seja P o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B e N, o ângulo central que corresponde ao arco AB dessa circunferência mede 60º.

Portanto, o triângulo PAB é eqüilátero [dois de seus lados são raios] e, então, R = 1, pois $\overline{AB}$ = 1.

Resposta: O raio da circunferência que passa por A,B e N é de 1 km (2 pontos).

b) Sejam α e β os ângulos ABN e NBC, de modo que $\alpha + \beta = 150^0$. Temos então que: $\cos\beta = \dfrac{\overline{NB}}{2}$ e [pela lei do seno] $\dfrac{1}{sen30^0} = \dfrac{\overline{NB}}{sen\beta}$.

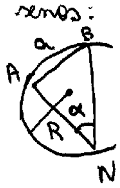
Dessas igualdades concluímos que $\cos\beta = sen\beta$ e, daí, que $\beta = 45^0$.

Então, $\overline{NB} = 2\cos\beta = 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Resposta : O comprimento do segmento NB é de $\sqrt{2}$ km (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a-) Utilizando a lei dos senos:



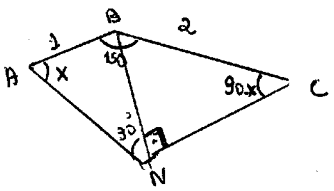
$\dfrac{a}{sen\alpha} = 2R$

Substituindo esses valores

$\dfrac{1}{sen30^\circ} = 2R$

$R = \dfrac{1}{0,5\cdot 2}$

$\boxed{R = 1\ Km}$



Da lei dos senos

$\dfrac{NB}{sen\,x} = 2R \rightarrow \dfrac{NB}{sen\,x} = 2$ (I) ΔABN

No Δ BCN

$sen(90-x) = \dfrac{BN}{2} \rightarrow \cos x = \dfrac{BN}{2}$ (II)

Substituindo NB em II:

$\cos x = \dfrac{2 sen\,x}{2}$

$\cos x = sen\,x \Rightarrow x = 45^\circ$ pois x é tal que $0 < x < 90^\circ$

Logo de II:

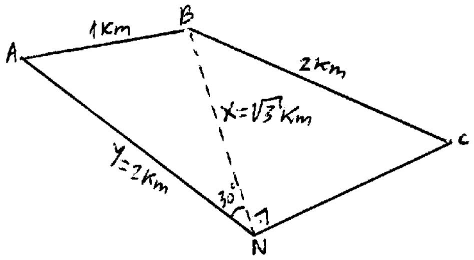
$NB = 2\,sen\,x$

$NB = 2\,sen\,45^\circ$

$NB = 2\sqrt{2}/2$

$\boxed{NB = \sqrt{2}\ Km}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA



b) $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{y} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \rightarrow y = 2$

$\cos 30° = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{y} \rightarrow x = y.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{3}}$

O comprimento do segmento NB é de $\sqrt{3}$ Km.

a) $\text{Área } ABN = \frac{Y.X.\operatorname{sen}30°}{2} \rightarrow \text{Área} = \frac{2.\sqrt{3}.\frac{1}{2}}{2} \rightarrow \text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{Área } ABN = \frac{1.Y.X}{4R} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.2.\sqrt{3}}{4R} \rightarrow 4R = 4 \rightarrow \boxed{R = 1 \text{ Km}}$

O raio da circunferência é de 1Km.

COMENTÁRIOS

Esta é uma questão que foi considerada relativamente difícil pelos candidatos, embora envolvesse apenas tópicos comumente explorados de geometria plana e trigonometria. Apesar de ambos os itens poderem ser resolvidos através da lei do seno, poucos candidatos recorreram a ela. Muitos inferiram, sem usar premissas matemáticas, que o triângulo ABN era retângulo, o que os levou a resultados incorretos. A resolução da questão também dependia de que se conhecesse o valor da soma dos ângulos de triângulos e quadriláteros e os valores das funções trigonométricas para alguns ângulos notáveis.

7. Um capital de R$12.000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

a) O capital acumulado após 2 anos.

b) O número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial.

[Se necessário, use log10 2 = 0,301 e log10 3 = 0,477]

RESPOSTA ESPERADA

a) Após o primeiro ano, teremos 12.000,00 x 1,08 = 12.960,00 e após o segundo ano o capital acumulado será (12.000,00 x 1,08) x 1,08 = 12.960,00 x 1,08 = 13.996,80.

Resposta: O capital acumulado após 2 anos será R$ 13.996,80 (2 pontos).

b) Após n anos o capital acumulado será C = C0 (1,08)n, onde C0 é o capital inicial. Logo estamos procurando o menor inteiro n tal que C = C0 (1,08)n > 2 C0 . Isto é, (1,08)n > 2. Esta desigualdade, após passar para logaritmos (na base 10), torna-se n log (1,08) > log 2. Então n log (108/100) > log 2 e n log (23 32 /100) > log 2. A última desigualdade escreve-se usando as propriedades dos logaritmos, como n (2 log 2 + 3 log 3 – log 100) > log 2. Logo, como log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, temos n (0,602 + 1,431 – 2) > 0,301 e n . 0,033 > 0,301. Deste modo, temos que n > 0,301/0,033 9,121.

Resposta: Para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial, são necessários 10 anos (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $\frac{108}{100} \times 12000 = 12960,00$

$\frac{108}{100} \times 12960 = 13.996,80$

$\boxed{R = R\$\ 13.996,80}$

b) PG de razão $\frac{108}{100}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$2a_1 = a_1 \cdot q^{n-1}$

$q^{n-1} = 2$

$\left(\frac{108}{100}\right)^{n-1} = 2$

$\log_{\left(\frac{108}{100}\right)} 2 = n-1$

$n-1 = \frac{\log 2}{\log 108 - \log 100}$

$n-1 = \frac{0,301}{\log 2^2 \cdot 3^3 - 2}$

$n-1 = \frac{0,301}{2(0,301) + 3(0,477) - 2}$

$n-1 = \frac{0,301}{0,033}$

$n-1 = 9,12$

$n = 10,12$

$a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$ será maior que o dobro

$\boxed{R = 10 \text{ anos}}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

CONSIDERANDO JUROS SIMPLES:

a) $J = 12000 \cdot 0,08 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{J = 1920}$

CAPITAL ACUMULADO $= 12000 + 1920 = \boxed{13920 \text{ REAIS}}$

b) CONSIDERANDO JUROS SIMPLES PARA QUE O CAPITAL ACUMULADO SEJA MAIOR QUE 24000, O JUROS DEVE SER MAIOR QUE 12000, LOGO:

$12000 = 12000 \cdot 0,08 \cdot n$

$n = \frac{1}{0,08} = 12,5$ ANOS

O NÚMERO MÍNIMO DE ANOS É $\boxed{13 \text{ ANOS}}$

COMENTÁRIOS

Uma questão muito tradicional, que exige dos alunos conhecimentos sobre a função exponencial e os logaritmos. Mesmo assim, vários alunos mostraram incapacidade de trabalhar com números decimais, bem como desconhecimento das propriedades básicas dos logaritmos. Um erro comum foi o de aproximar (arredondar) de maneira errada os números em questão. Houve também alunos que utilizaram juros simples.

8. A função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é chamada função quadrática.

a) Encontre a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos A(0,2) , B(–1,1) e C(1,1).

b) Dados os pontos $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ e $C(x_2, y_2)$, mostre que, se x0 < x1 < x2 e se os pontos A, B e C não pertencem a uma mesma reta, então existe uma única função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos A, B e C.

RESPOSTA ESPERADA

a) Se o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos A(0,2), B(-1,1) e C(1,1), então temos as seguintes 3 equações:

$a.0^2 + b.0 + c = 2$, $a(-1)^2 + b.(-1) + c = 1$ e $a.(1)^2 + b.1 + c = 1$.

Da primeira equação, segue que c = 2 e substituindo esse valor nas outras duas equações, encontramos a = -1 e b = 0.

Resposta: $y = -x^2 + 2$ (2 pontos).

b) Por hipótese temos $x_0 < x_1 < x_2$ e A , B e C são pontos não colineares. Queremos mostrar que o sistema linear:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \end{cases}$$

cujas incógnitas [variáveis] são a, b e c, tem solução única e que esta solução é tal que $a \neq 0$.

O determinante da matriz dos coeficientes desse S.L. é um determinante especial [chamado determinante de Vandermonde], cujo valor é $(x_2 – x_1)$ $(x_2 – x_0)$ $(x_1 – x_0)$.

Como $x_0 < x_1 < x_2$, este determinante é diferente de zero e, portanto, o S.L. em questão tem uma única solução. Além disso, como os pontos A, B e C são não colineares, o determinante da matriz que se obtém substituindo-se a primeira coluna da matriz dos coeficientes pela coluna dos termos independentes [no caso, y_0, y_1, y_2] também é diferente de zero. Então, por Laplace, $a \neq 0$ (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a-) Substituindo esses valores na função:

A(0,2)

$a.0^2 + b.0 + c = 2$

$\boxed{c = 2}$

B(-1,1)

$a(-1)^2 + b(-1) + 2 = 1$

$a - b = -1$ (I)

C (1,1)

$a.1^2 + b.1 + 2 = 1$

$a + b = -1$ (II)

Fazendo I + II

$2a = -2$

$\boxed{a = -1}$

Logo $b = -1 - a$ (II)

$b = -1 - (-1)$

$b = 0$

A função é: $y = -x^2 + 2$

b-) Substituindo esses valores:

$$\begin{cases} a x_0^2 + b x_0 + c = y_0 \\ a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \end{cases}$$

Fazendo-se o determinante da matriz incompleta:

$$D = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \neq 0$, pois

(Van der monde)

$x_0 \neq x_1 \neq x_2$ e $x_2 \neq x_0$. Como o $D \neq 0$ o sistema admite uma única solução. Logo teremos um único conjunto de valores para a, b e c e portanto a função será única.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) $a x^2 + b x + c = y$

ponto A $(0,2)$

$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$
$c = 2$

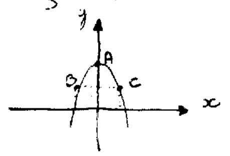
ponto B $(-1,1)$

$a \cdot (-1)^2 + b \cdot 1 + 2 = 1$
$a + b = 1 - 2$
$a + b = -1$

ponto C $(1,1)$

$a \cdot (1)^2 + b \cdot 1 + 2 = 1$
$a + b + 2 = 1$
$a + b = -1$

$a \neq 0$, então $b = 0$, $a = -1$ $\}\ a + b = -1$ $\{\ a + b = -1$



a função é $x^2 + 2 = 0$

COMENTÁRIOS

Questão considerada difícil, especialmente a segunda parte. Os tópicos abordados para a solução da questão são: funções; parábola; sistemas de equações lineares; matrizes; determinantes; geometria analítica.

9. Com as letras x, y, z e w podemos formar monômios de grau k, isto é, expressões do tipo $x^p y^q z^r w^s$, onde *p*, *q*, *r* e *s* são inteiros não-negativos, tais que p + q + r + s = k. Quando um ou mais desses expoentes é igual a zero, dizemos que o monômio é formado pelas demais letras. Por exemplo, y^3z^4 é um monômio de grau 7 formado pelas letras y e z [nesse caso, p = s = 0].

a) Quantos monômios de grau 4 podem ser formados com, no máximo, 4 letras?

b) Escolhendo-se ao acaso um desses monômios do item a, qual a probabilidade dele ser formado por exatamente duas das 4 letras?

RESPOSTA ESPERADA

a) A equação p + q + r + s = 4 possui 35 soluções inteiras não-negativas. Para cada uma dessas soluções corresponde um monômio de grau 4.

Resposta: São 35 os monômios de grau 4 com, no máximo, 4 letras (3 pontos).

b) Para que um desses monômios seja formado por exatamente duas letras, os expoentes de duas letras devem ser iguais a zero. Como são 6 pares de letras e a equação x + y = 4, com x > 0 e y > 0, tem apenas 3 soluções, a saber: (1,3), (2,2) e (3,1), temos 6.3 = 18 monômios formados com exatamente duas das 4 letras.

Resposta: A probabilidade é de $\frac{18}{35} \cong 0{,}51{,}42 = 51{,}42\%$ (2 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

letras: x, y, z, w

A) monômios de grau 4 ⇒ mínimo 1 letra, máximo 4 letras

1 letra: 4 possibilidades (x^4, y^4, z^4, w^4)

2 letras: permutamos 4 letras para 2 posições $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ combinações

Os expoentes dessas 6 combinações podem ser de 3 tipos (2 e 2, 1 e 3, 3 e 1)

$6 \cdot 3 = 18$ possibilidades

3 letras: permutamos 4 letras para 3 posições ⇒ 4 combinações

Os expoentes dessas 4 combinações podem ser de 3 tipos (1,2 e 1; 1,1 e 2; 2,1,1)

$4 \cdot 3 = 12$ possibilidades

$4 + 18 + 12 + 1 = \boxed{35}$

4 letras: 1 possibilidade $x^1 y^1 z^1 w^1$

B) $\mathbb{P}(2 \text{ letras}) = \dfrac{18}{35}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) As letras podem assumir zero ou acima de zero, logo duas condições. Portanto temos 4 letras e duas condições

4^2 = número de possibilidades.

R: Podem ser formados até 16 monômios.

b) Seja 0 para letra nula e 1 para letra não nula temos todas os possibilidades.

p	q	r	s	p	q	r	s
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1

temos $\frac{6}{16}$ formados com 2 letras

R: A probabilidade é $\frac{6}{16}$

COMENTÁRIOS

O propósito da questão foi verificar o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório do candidato, através da sua aplicação a um problema simples envolvendo a combinação dos expoentes de um monômio de grau 4. A resolução da questão está baseada em conhecimentos relativos ao domínio da análise combinatória, bem como à noção de probabilidade. A correção revelou duas maneiras diferentes dos candidatos resolverem a questão: uma mais intuitiva, remetendo a procedimentos exaustivos, e outra mais próxima daquela presente no quadro de respostas esperadas pela banca.

10. Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = x/|z|$ e $\text{sen}\,\theta = y/|z|$. Esta forma de representar os números complexos não-nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de De Moivre:

$$[|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^k = |z|^k(\cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta)$$

que é válida para todo $k \in Z$. Use essas informações para:

a) Calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$

b) Sendo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor de $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{15}$.

RESPOSTA ESPERADA

a) $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = \sqrt{3+1} = 2$ e $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\theta = \dfrac{1}{2}$ e $\theta = \dfrac{\pi}{6} = 30^0$.
Então:

Resposta: $(\sqrt{3} + i)^{12} = 4.096$ (2 pontos).

$$(\sqrt{3}+i)^{12} = 2^{12}(\cos 12.\frac{\pi}{6} + i sen 12.\frac{\pi}{6}) = 2^{12}(\cos 2\pi + i sen 2\pi) = 2^{12} = 4.096$$

b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$ e $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

$S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{15} = \frac{z^{16}-1}{z-1}$ [para z diferente de 1] e sendo

$z = \cos\frac{\pi}{4} + i sen\frac{\pi}{4}$, temos $z^{16} = \cos 16.\frac{\pi}{4} + sen 16.\frac{\pi}{4} = \cos 4\pi + i sen 4\pi = 1$.

Portanto, $z^{16} - 1 = 0 \Rightarrow$ S = 0.

Resposta: $S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{15} = 0$. [2 pontos]

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $(\sqrt{3}+i) = 2.(\cos 30^\circ + i.sen 30^\circ)$

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2}$ $(\theta = 30^\circ)$

$(\sqrt{3}+i)^{12} = 2^{12}[\cos(30.12) + i.sen(30.12)]$

$(\sqrt{3}+i)^{12} = 4096(\cos 360^\circ + i.sen 360^\circ)$.

$(\sqrt{3}+i)^{12} = 4096(1+0.i) = 4096 + 0i$

Resp: $(\sqrt{3}+i)^{12} = 4096 + 0i$ (algébrica)

$(\sqrt{3}+i)^{12} = 4096(\cos 360^\circ + i sen 360^\circ)$ (trigonométrica).

$|z| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

b) $z = 1(\cos 45^\circ + i.sen 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z^2 = 1^2(\cos 90^\circ + i.sen 90^\circ) = 0 + 1i$

$z^3 = 1^3(\cos 135^\circ + i.sen 135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z^4 = 1^4(\cos 180^\circ + i.sen 180^\circ) = -1 + 0i$

$z^5 = 1^5(\cos 225^\circ + i\,sen 225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z^6 = 1^6(\cos 270^\circ + i.sen 270^\circ) = 0 - 1i$

$z^7 = 1^7(\cos 315^\circ + i.sen 315^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z^8 = 1^8(\cos 360^\circ + i.sen 360^\circ) = 1 + 0i$

Somando tudo vai da ZERO, e isso repete na seqüencia de:

$z^9 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{13} + z^{14} + z^{15} + 1 = 0$

Resp: Portanto, o valor final é ZERO

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) $(\sqrt{3}+i)^{12} = ((\sqrt{3}+i)^2)^6 = (3 + 2\sqrt{3}i + (-1))^6 = (2 + 2\sqrt{3}i)^6$

$(2+2\sqrt{3}i)^6 = ((2+2\sqrt{3}i)^2)^3 = (4 + 8\sqrt{3}i + 4.3.(-1))^3 = (-8 + 8\sqrt{3}i)^3$

$(-8+8\sqrt{3}i)^3 = -512 + 2.(64).8\sqrt{3}i + 2.(-8).(8\sqrt{3}i)^2 + (8\sqrt{3}i)^3 =$

$-512 + 1024\sqrt{3}i + (-16).(64.3.(-1)) + (8\sqrt{3}i)^2.(8\sqrt{3}i) =$

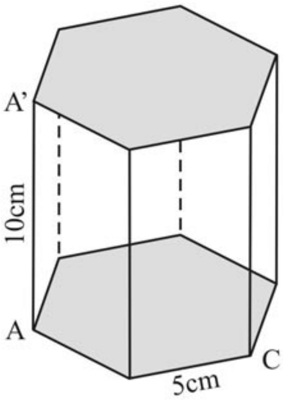
$\cancel{-512} + 1024\sqrt{3}i + \cancel{1024} + 64.3.(-1).8\sqrt{3}i =$

$512 + 1024\sqrt{3}i + (-192).8\sqrt{3}i =$

$= 512 + 1024\sqrt{3}i - 1536\sqrt{3}i = \boxed{512 - 512\sqrt{3}i}$

COMENTÁRIOS

Embora problemas que envolvam números complexos sejam, geralmente, considerados difíceis, a resolução do item a desta questão exigia apenas que se seguisse o roteiro fornecido no enunciado. Para resolver o item b, era necessário recorrer à fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, ou enumerar todos os dezesseis termos da soma, o que exigia um trabalho considerável, apesar dos valores se cancelarem. Muitos candidatos alcançaram o resultado correto trabalhando com um ângulo errado, não obtendo os pontos da questão.



11. A figura ao lado apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5cm cada um e a altura do prisma mede 10cm.

a) Calcule o volume do prisma.

b)Encontre a área da secção desse prisma pelo plano passa pelos pontos A, C e A’.

RESPOSTA ESPERADA

a) A área de um hexágono regular de lado a é igual a 6 vezes a área do triângulo eqüilátero de lado a. Como esta última área é igual a a2 √3/4, então a área do hexágono será igual a 6. 52 √3/4 = 75 √3 /2 cm2, pois a = 5 cm. Como o volume do prisma mede o produto da área da base e a altura, teremos que o volume V = 10.75√3/2 = 375√3 cm3.

Resposta: O volume V do prisma mede V = 75 √3 cm3 (2 pontos).

b) As faces hexagonais do prisma são paralelas. Portanto, o plano determinado por A, C e A’ intersecta as duas faces hexagonais em retas paralelas. Logo, o ponto C’ também pertence ao plano. Então, a intersecção do plano com o prisma será o retângulo ACC’A’. Pela lei do cosseno para o triângulo AOC, onde O é o centro da circunferência circunscrita para o hexágono, temos |AC|2 = |OA|2 + |OA|2 – 2. |OA|2 cos 120o = 50 + 50/2 = 75. Logo, AC = 5 √3. A área procurada será igual a AC . h onde h é a altura do prisma. Assim, a área é 5 √3 x 10 = 50 √3 cm3.

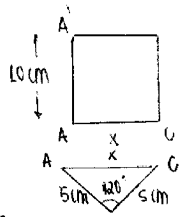
Resposta: A área da secção é 50 √3 cm3 (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) o volume do prisma é dado por Ab h, onde h = 10 cm.
Um hexágono regular é composto por 6 triângulos equiláteros de lado
l = 5 cm logo $Ab = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{\cancel{(4)}\,2}\ cm^2$
$Vol = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 375\sqrt{3}\ cm^3$

o volume do prisma é $375\sqrt{3}\ cm^3$

b) Pela lei dos co-senos achamos x :
$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2.5.5 \cos 120°$ onde $\cos 120° = -1/2$
$\Leftrightarrow x^2 = 50 + 25 = 75$
$\Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}$ cm



A área da secção desse prisma é $10.5\sqrt{3}\ cm^2 =$
$= 50\sqrt{3}\ cm^2$.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

A-) $A_{BASE} = 6 . A_{\substack{\text{TRIÂNGULO} \\ \text{EQUILÁTERO}}} = 6 . \frac{l\sqrt{3}}{4} = \frac{6.5.\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{15\sqrt{3}}{2}\ cm^2}$

$V_{PRISMA} = A_{BASE} . h = \frac{15\sqrt{3}}{2} . 10 = \boxed{75\sqrt{3}\ cm^3}$

O VOLUME DO PRISMA É $75\sqrt{3}\ cm^3$.

B-) POR PITÁGORAS:

$10^2 = 5^2 + AC^2 \rightarrow AC^2 = 75 \rightarrow AC = 5\sqrt{3}\ cm$

$A_{SEÇÃO} = \frac{b.h}{2} = \frac{5\sqrt{3} . 10}{2} = \boxed{25\sqrt{3}\ cm^2}$

COMENTÁRIOS

A geometria espacial é um tema pouco estudado nos colégios. Porém, a questão exige conhecimentos muito simples. Portanto, praticamente todos os candidatos trabalharam sobre a questão. Por outro lado, foram comuns os erros básicos tais como considerar a secção como sendo o triângulo ACA', ou errar nas fórmulas de área e volume. A solução proposta pela banca não é a única. O comprimento de AC pode ser calculado de várias maneiras. A observação mais importante é que atualmente a maioria dos candidatos possui alguns conhecimentos em geometria espacial, ao contrário do que ocorria há alguns anos.

12. Para resolver equações do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, podemos proceder do seguinte modo: como x = 0 não é uma raiz, divide-se a equação por x2 e, após fazer a mudança de variáveis u = x+1/x, resolve-se a equação obtida [na variável u]. Observe que, se $x \in R$ e $x > 0$, então $u \geq 2$.

a) Ache as 4 raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1=0$.

b) Encontre os valores de $b \in R$ para os quais a equação $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz real positiva.

RESPOSTA ESPERADA

a) Dividimos ambos os membros da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ por $x^2 \neq 0$ para obter a equação $x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. A substituição $u = x + \frac{1}{x}$ leva à equação $u^2 - 3u + 2 = 0$, cujas raízes são u =1 e u =2.

Voltando para a variável x, obtemos as raízes $x_1 = x_2 = 1$ [correspondentes a u = 2], $x_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $x_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Resposta: As raízes são x = 1 [dupla] e $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (2 pontos).

b) Repetindo a mesma mudança de variáveis na equação $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1=0$, obtemos a equação u2-3u+b-2=0. Para que esta equação tenha raízes reais deve-se ter $\Delta = 17 - 4b \geq 0$ e, portanto, $b \leq \frac{17}{4}$.

Por outro lado, para x > 0, $u = \dfrac{3 \pm \sqrt{17-4b}}{2} \geq 2$ e esta desigualdade nos leva a $b \leq 4$.

Resposta: $b \leq 4$ (3 pontos).

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0}{x^2}$

$x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} + 4 = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$

$u^2 - 2 - 3u + 4 = 0$

$u = 2 \lor u = 1$.

$u = 2$

$x + \frac{1}{x} = 2$

$x = 1$

(multiplicidade 2).

$u = 1$

$x + \frac{1}{x} = 1$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

R: As raízes são: 1 (raiz de multiplicidade 2), $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

b) $u^2 - 3u + b - 2 = 0$

$u = \dfrac{3 \pm \sqrt{17-4b}}{2} \geq 2$.

condição de existência: $17 - 4b \geq 0$

$b \leq \frac{17}{4}$.

$3 + \sqrt{17-4b} \geq 4$ ou $3 - \sqrt{17-4b} \geq 4$.

$b \leq 4$ $\qquad$ $b \leq 4$

R: $b \leq 4$.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \;\underline{|\; x^2}$

$-3x + 1 \qquad x^2 - 3x + 4$

$x^2(x^2 - 3x + 4) + 1 - 3x = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

$x = 0 \qquad x' =$ duas raízes não reais.

$x'' = -\frac{1}{3}$

b) p/ $b = 0$ $\quad x^4 - 3x^3 - 3x + 1 = 0$

possuirá raízes reais (ao menos 1)

COMENTÁRIOS

Questão considerada muito difícil, especialmente pela manipulação algébrica abstrata que se exige na solução do problema. Está bem formulada e exige interpretação de texto.

Os tópicos do programa envolvidos nessa questão são: polinômios; equação do segundo grau; desigualdades; números complexos e manipulações algébricas.